Opakování - Nucené kmity s tlumením – řešení v komplexní reprezentaci

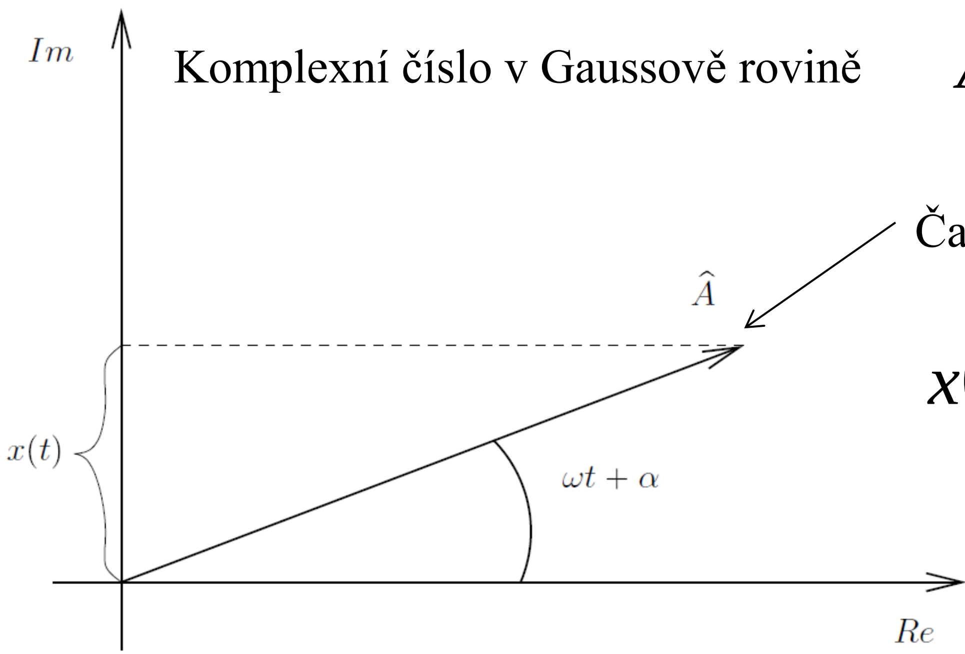
harmonický kmit: $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \longrightarrow Ae^{i(\omega t+\varphi)}$

amplituda úhlová frekvence fázový posuv

$$\hat{A} = Ae^{i(\omega t+\varphi)} = A\cos(\omega t + \varphi) + iA\sin(\omega t + \varphi) = A_R + iA_I$$

Komplexní číslo v Gaussově rovině

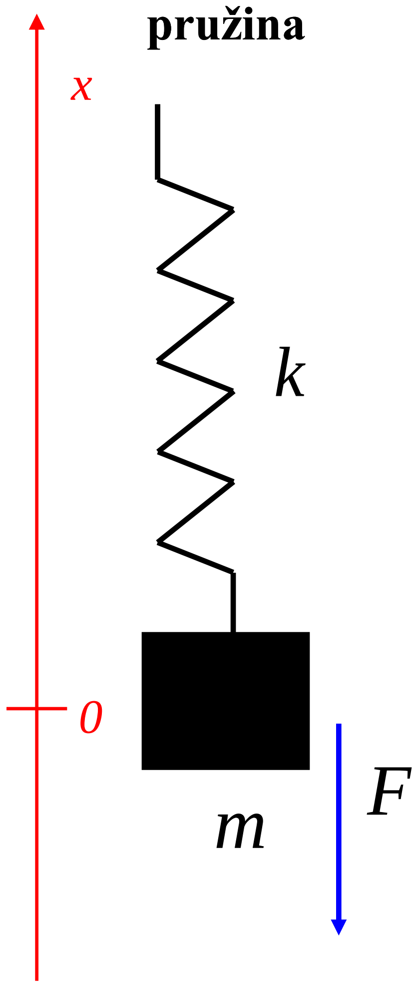
$$A = \left|\hat{A}\right| = \sqrt{A_R^2 + A_I^2}, \quad tg\varphi = \frac{A_I}{A_R}$$



Časový vektor - fázor

$$x(t) = \mathrm{Im}\left\{Ae^{i(\omega t+\varphi)}\right\} = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Opakování - Nucené kmity s tlumením – řešení v komplexní reprezentaci



- budící síla:

$$F = F_0 e^{i\Omega t}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x} + 2\delta + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

- obecné řešení: $x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_1 e^{\alpha_2 t} + x_p$

- partikulární řešení: $x_p = A_p e^{i(\Omega t + \alpha)}$

partikulární řešení:

$$A_p = \frac{F_0}{mK} = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

$$\hat{K} = \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + i2\delta\Omega = Ke^{i\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha = -\mathrm{tg}\,\beta = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Rezonance v elektrických obvodech

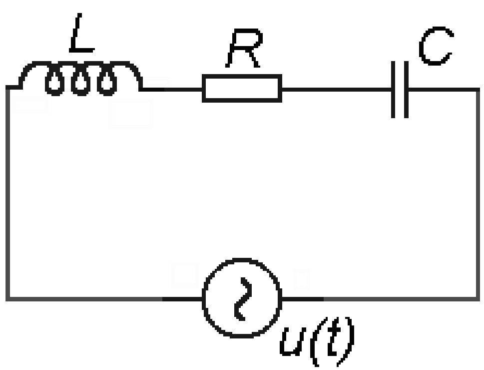
- RLC obvod $U(t) = U_C + U_R + U_L$
- kondenzátor $U_C = \dfrac{q}{C}$
- odpor $U_R = RI = R\dfrac{dq}{dt}$
- cívka $U_L = L\dfrac{dI}{dt} = L\dfrac{d^2q}{dt^2}$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = U(t) = U_0 e^{i\Omega t}$$

$$q = q_0 e^{i(\Omega t + \alpha)}$$

$$L(i\Omega)^2 q_0 + Ri\Omega q_0 + \frac{1}{C}q_0 = U_0 e^{-i\alpha}$$

$$q_0\left(\frac{1}{C} - L\Omega^2 + iR\Omega\right) = U_0 e^{-i\alpha}$$



$$Z = Z_0 e^{i\beta}, \quad Z_0 = \sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\Omega^2\right)^2 + R^2\Omega^2}, \quad \mathrm{tg}\beta = \frac{R\Omega}{\frac{1}{C} - L\Omega^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \; 2\delta = \frac{R}{L} \qquad q_0 Z_0 e^{i\beta} = U_0 e^{-i\alpha} \Rightarrow$$

$$q_0 = \frac{U_0}{Z_0} = \frac{U_0}{L\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}, \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{2\delta\Omega}{\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)}$$

Ekvivalence mechanické a elektrické rezonance

• **vlastnost**	• **mechanická rezonance**	• **elektrická rezonance**
• nezávisle proměnná	• čas t	• čas t
• závisle proměnná	• poloha x	• náboj q
• setrvačnost	• hmotnost m	• indukčnost L
• odpor	• koeficient tření, $h = 2\delta m$	• elektrický odpor, $R = 2\delta L$
• tuhost	• mechanická tuhost k	• 1 / kapacita, C^{-1}
• vlastní frekvence	• $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$	• $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$
• perioda	• $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$	• $T = 2\pi\sqrt{LC}$
• činitel jakosti	• $Q = \dfrac{\omega_0}{2\delta}$	• $Q = \dfrac{\omega_0 L}{R}$

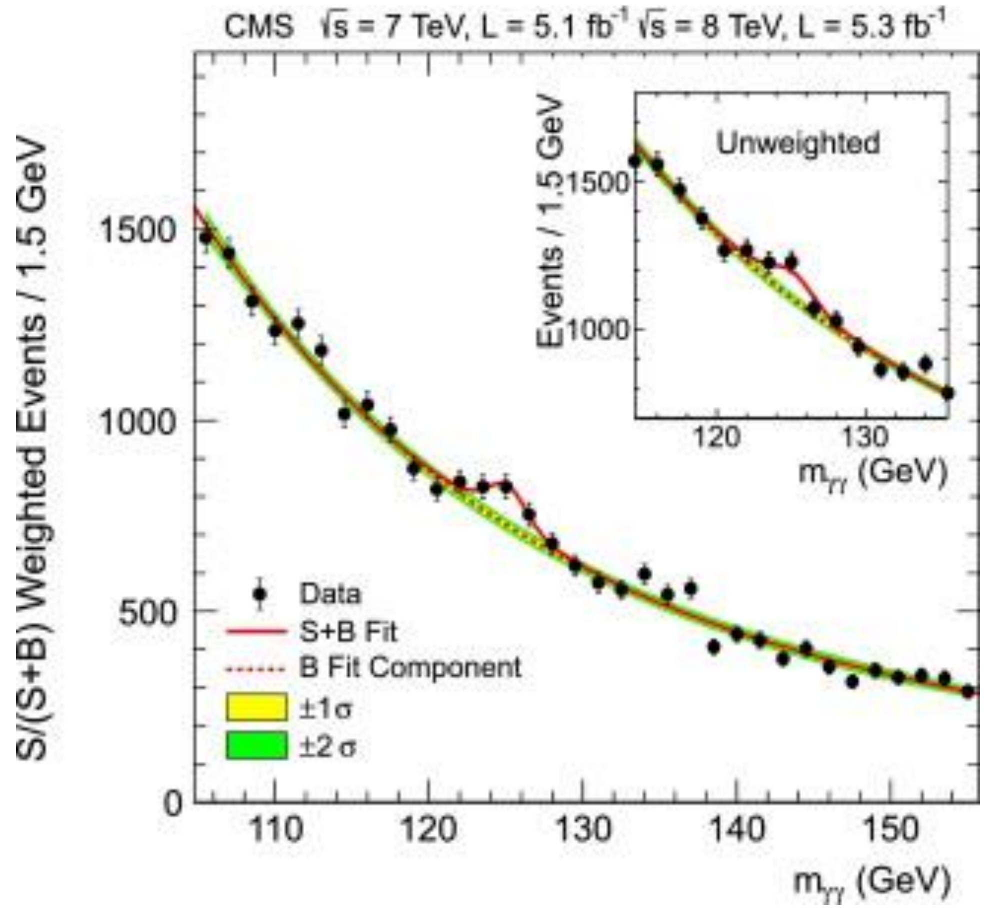
Higgsův boson

$$I(\Omega)=\frac{\delta}{(\omega_0-\Omega)^2+\delta^2}$$

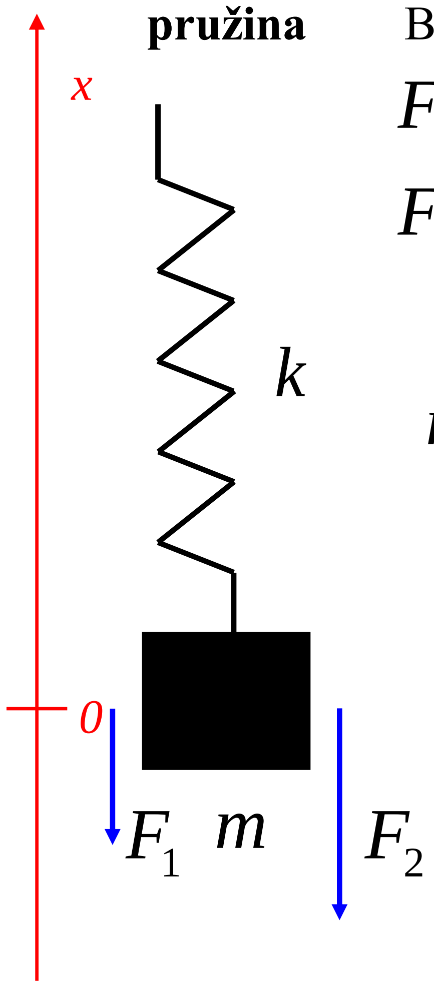
klidová hmotnost

rychlost rozpadu

ω_0 = 125 GeV



Skládání kmitů – princip superpozice



Budící síly:

$$F_1 = F_1(t)$$
$$F_2 = F_2(t)$$

Pohybové rovnice:

$$m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t)$$
$$m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t)$$

Řešení pohybových rovnic:

$$x_1 = x_1(t)$$
$$x_2 = x_2(t)$$

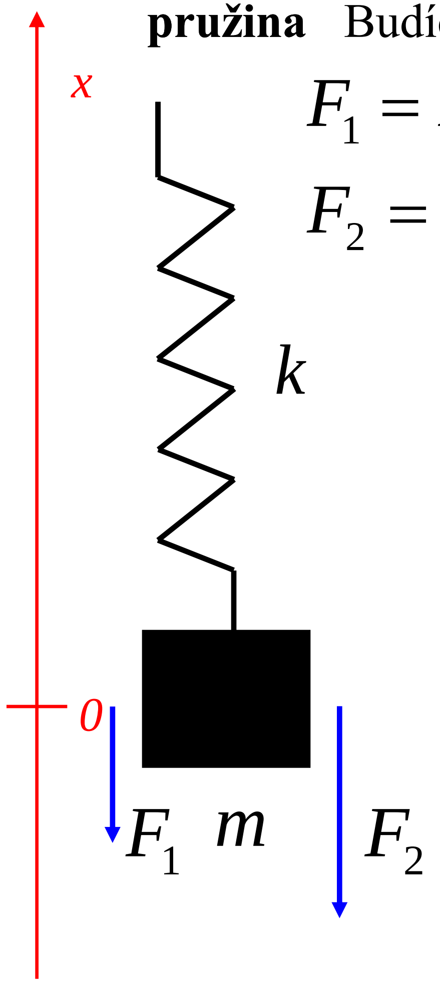
$$m\frac{\mathrm{d}^2(x_1 + x_2)}{\mathrm{d}t^2} + h\frac{\mathrm{d}(x_1 + x_2)}{\mathrm{d}t} + k(x_1 + x_2) = F_1(t) + F_2(t)$$

Potom je: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Řešením rovnice: $m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + h\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F(t) = F_1(t) + F_2(t)$

Skládání kmitů v jednom směru

pružina Budící síly: Pohybové rovnice: Řešení pohybových rovnic:



$$F_1 = F_{01} \sin(\omega_1 t) \quad m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t) \quad x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$F_2 = F_{02} \sin(\omega_2 t) \quad m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t) \quad x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Řešením je tedy: $x = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$

Položíme-li nejprve : $\omega = \omega_1 = \omega_2$ Dostaneme:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) =$$

$$= A_1 \sin \omega t \cos \alpha_1 + A_1 \cos \omega t \sin \alpha_1 +$$

$$+ A_2 \sin \omega t \cos \alpha_2 + A_2 \cos \omega t \sin \alpha_2 =$$

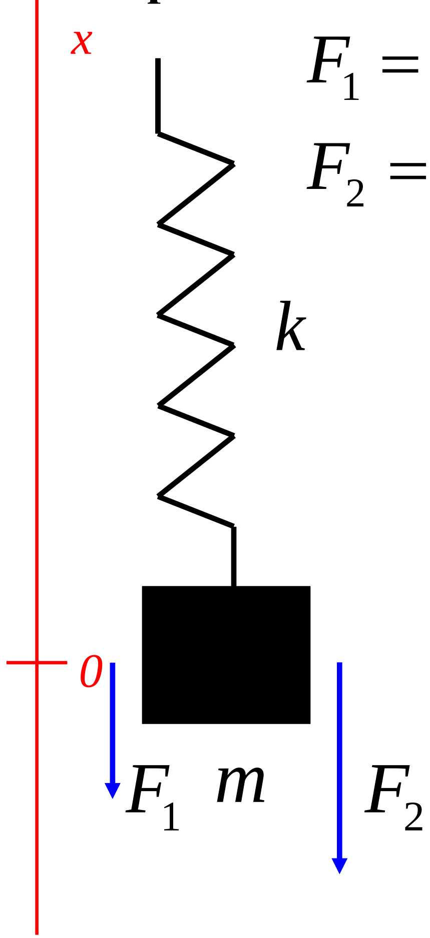
$$= (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) \cos \omega t$$

$$x = A \sin(\omega t + \alpha), \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}$$

Skládání kmitů v jednom směru

pružina Budící síly: Pohybové rovnice: Řešení pohybových rovnic:



$$F_1 = F_{01}\sin(\omega_1 t) \qquad m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t) \qquad x_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$F_2 = F_{02}\sin(\omega_2 t) \qquad m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t) \qquad x_2 = A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Potom je řešením: $x = x_1 + x_2 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$

Položíme-li nejprve : $\omega = \omega_1 = \omega_2$ Dostaneme:

$$x = A\sin(\omega t + \alpha), \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

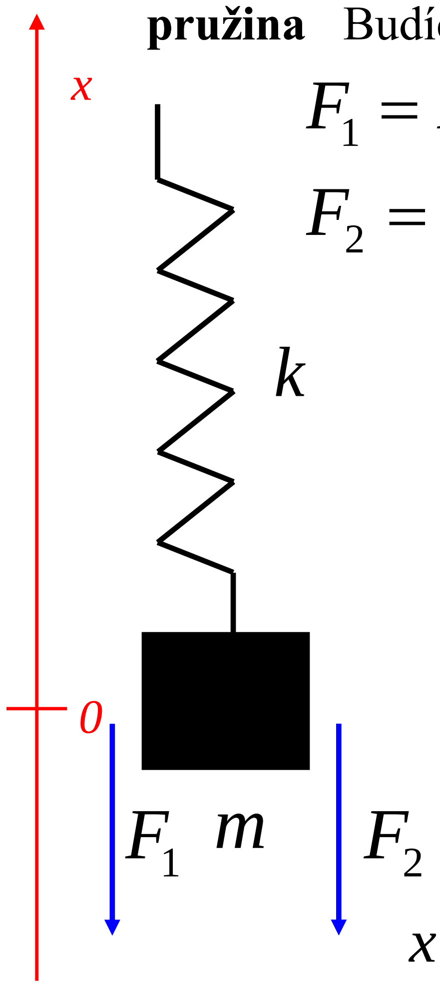
$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}$$

Nulovou hodnotu může amplituda nabývat pouze když je:

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = -1, \quad \text{tj.} \quad \alpha_2 - \alpha_1 = (2k-1)\pi, \quad \text{a} \quad A_1 = A_2$$

Pokud je: $\alpha = \alpha_2 = \alpha_1, \quad tak \quad A = A_1 + A_2$

Skládání kmitů v jednom směru



pružina Budící síly:

$$F_1 = F_{01}\sin(\omega_1 t) \qquad F_2 = F_{02}\sin(\omega_2 t)$$

Pohybové rovnice:

$$m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t) \qquad m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t)$$

Řešení pohybových rovnic:

$$x_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) \qquad x_2 = A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Potom je řešením: $x = x_1 + x_2 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$

Za druhé vyšetříme případ: $\omega_1 \neq \omega_2, \quad A = A_1 = A_2$ Dostaneme:

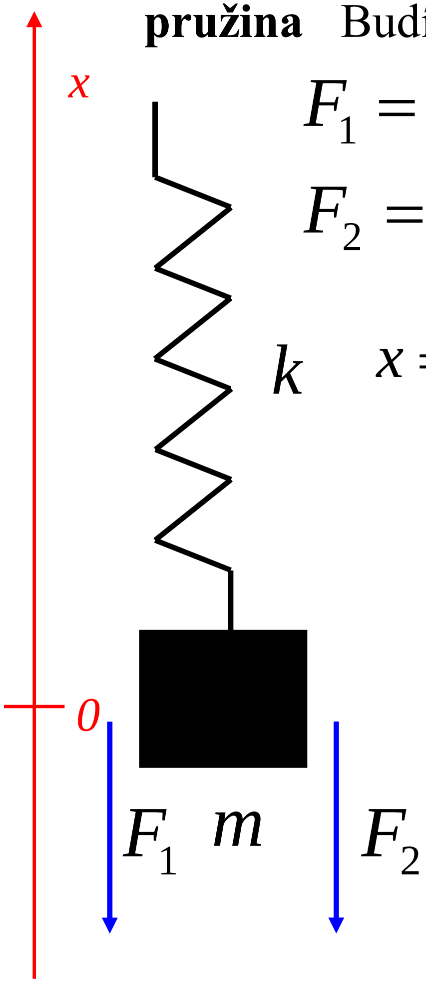
$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$

Pokud je: $\omega_1 > \omega_2, \quad tak \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

Potom dostaneme harmonický kmit s časově závislou amplitudou :

$$x = A(t)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \alpha\right), \quad kde \quad A(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \alpha\right)$$

Skládání kmitů v jednom směru

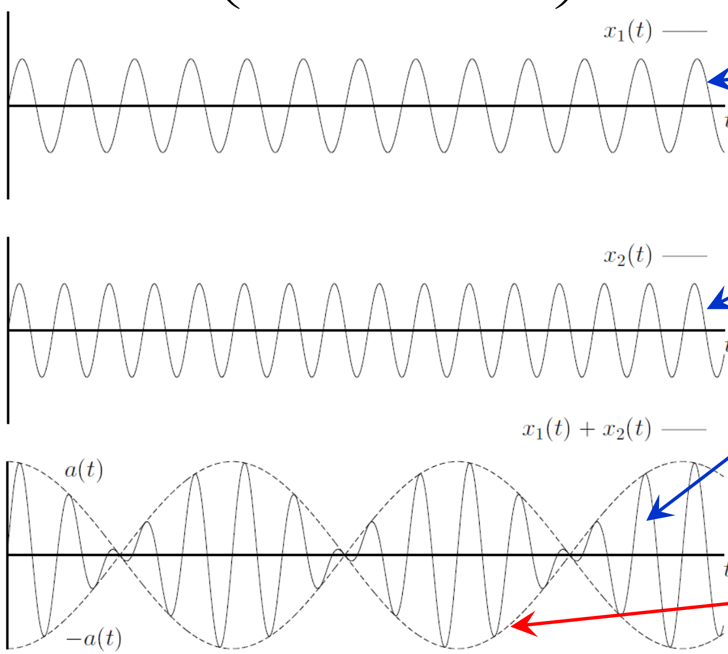


pružina Budící síly: Pohybové rovnice: Řešení pohybových rovnic:

$$F_1 = F_{01}\sin(\omega_1 t) \qquad m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t) \qquad x_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$F_2 = F_{02}\sin(\omega_2 t) \qquad m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t) \qquad x_2 = A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$x = A(t)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \alpha\right), \quad kde \quad A(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \alpha\right)$$



ω_1

ω_2

$\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

Amplituda se mění s rozdílovou frekvencí:

$$\omega_r = \omega_1 - \omega_2 \quad a\,ne \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

Skládání kmitů vzájemně kolmých

Kmity ve směru os x a y:

$$x = A_1 \sin\left(\omega_1 t\right)$$
$$y = A_2 \sin\left(\omega_2 t + \alpha\right)$$

Položíme-li nejprve : $\omega = \omega_1 = \omega_2$

Dostaneme: $\dfrac{x}{A_1} = \sin \omega t, \quad \dfrac{y}{A_2} = \sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha$

Dosadíme za sinωt do druhé rovnice: $\dfrac{y}{A_2} - \dfrac{x}{A_1} \cos \alpha = \cos \omega t \sin \alpha$

Umocníme: $\left(\dfrac{y}{A_2}\right)^2 - 2 \dfrac{y}{A_2} \dfrac{x}{A_1} \cos \alpha + \left(\dfrac{x}{A_1} \cos \alpha\right)^2 = \cos^2 \omega t \sin^2 \alpha$

Po úpravě dostaneme: $\dfrac{y^2}{A_2^2} - 2 \dfrac{y}{A_2} \dfrac{x}{A_1} \cos \alpha + \dfrac{x^2}{A_1^2} = \sin^2 \alpha$

Skládání kmitů vzájemně kolmých

Kmity ve směru os x a y:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t)$$
$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha)$$

Rovnice elipsy:

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{y}{A_2}\frac{x}{A_1}\cos\alpha + \frac{x^2}{A_1^2} = \sin^2\alpha$$

Pokud je fázový rozdíl nulový: $\alpha = 0$

Pohyb po přímce:

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{y}{A_2}\frac{x}{A_1} + \frac{x^2}{A_1^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\right)^2 \quad \Rightarrow y = \frac{A_2}{A_1}x$$

Pokud je fázový rozdíl: $\alpha = \pi/2, \quad a \quad A = A_1 = A_2$

Pohyb po kružnici:

$$y^2 + x^2 = A^2$$

Skládání kmitů vzájemně kolmých

Kmity ve směru os x a y:

$$x = A_1 \sin\left(\omega_1 t\right)$$

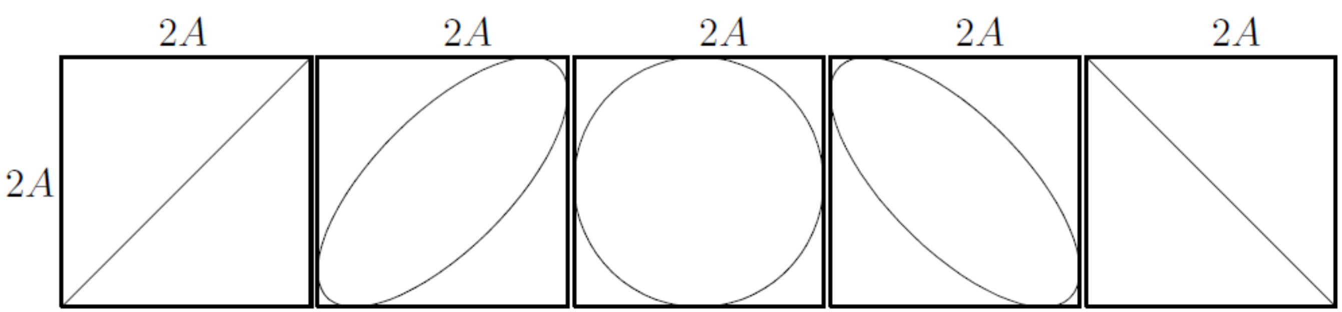
$$y = A_2 \sin\left(\omega_2 t + \alpha\right)$$

Rovnice elipsy:

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{y}{A_2}\frac{x}{A_1}\cos\alpha + \frac{x^2}{A_1^2} = \sin^2\alpha$$

Pokud je:

$$A = A_1 = A_2$$



(a) (b) (c) (d) (e)

a) $\alpha = 0$

b) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

c) $\alpha = \frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ a $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

e) $\alpha = \pi$.

Skládání kmitů vzájemně kolmých

Kmity ve směru os x a y:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t)$$

$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha)$$

V obecném případě:

$$\omega_1 \neq \omega_2, \quad -A_1 \leq x \leq A_1, \quad -A_2 \leq y \leq A_2$$

Budou-li frekvence v poměru:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{n}$$

Lissajousovy obrazce: